Федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и технологий

Высшая школа «Киберфизические системы и управление»

**Пояснительная записка**

**к курсовой работе**

**по теме «Исследование методов решения дифференциальных уравнений»**

по дисциплине «Практикум по вычислительной математике»

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Выполнил:  студент гр. 35330902/00002 | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Антонов В. А. |
|  | <*подпись*> |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Руководитель:  ст. преподаватель | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Кузнецова Л. В. |
|  | <*подпись*> |  |

«\_\_\_» \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2022 г.

Санкт-Петербург

2022

**Реферат**

Пояснительная записка к курсовой работе 31 с., 7 рис., 3 источника, 6 прил.

УРАВНЕНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ, МЕТОД, СИСТЕМА, ЯВНЫЙ, ПОРЯДОК, ШАГ, СХОДИМОСТЬ, ВСТРОЕННАЯ ФУНКЦИЯ, ГРАФИКИ.

Объектом исследования являются обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) и методы его решения.

Цель работы – исследовать методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для достижения цели в процессе работы решались следующие задачи:

1. Решить ОДУ разными методами:
   1. Аналитически (с использованием стандартной процедуры MATLAB dsolve).
   2. Методом Адамса-Башфорта 2-го порядка.
   3. Методом Рунге-Кутта (стандартная процедура MATLAB - ode45).
2. Построить графики решений. Сравнить полученные результаты.
3. Исследовать зависимость погрешности от выбора шага.

В результате исследования будут усвоены полученные знания решения обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами, с помощью: встроенной в MATLAB функции аналитического решения, метода Адамса-Башфорта 2-го порядка, метода Рунге-Кутта (стандартной процедурой ode45).

**Оглавление**:

Введение 4

1. Постановка задачи 5

2. Приведение ДУ к требуемому виду 6

3. Решение ДУ аналитически 7

4. Решение ДУ численными методами 8

4.1. Метод Адамса-Башфорта 2 порядка 8

4.2. Метод Рунге-Кутта 10

5. Сравнение полученных решений 12

5.1. Расчет погрешностей 12

5.2. Исследование зависимости погрешности от шага (для метода Адамса) 12

5.3. Исследование зависимости погрешности от шага (для метода Адамса) 13

Заключение 15

Список литературы 16

Приложение 1. 17

Приложение 2. 18

Приложение 3. 21

Приложение 4. 22

Приложение 5. 25

Приложение 6. 27

# Введение

В наши дни люди довольно часто сталкиваются с задачей решения дифференциальных уравнений, например, при расчетах в электротехнике или теоретической механике. Обычно, это линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ). Одним из частных случаев ЛДУ являются ЛДУ с постоянными коэффициентами.

**Дифференциальное уравнение** — уравнение, которое помимо функции содержит её производные. Порядок входящих в уравнение производных может быть различен (формально он ничем не ограничен).

Все численные методы связаны с переходом от дифференциальной системы к разностной схеме и вычислением приближенных решений в форме сеточных функций.

Метод Адамса - конечноразностный многошаговый метод численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка[1].

Метод Адамса-Башфорта относится к группе явных методов. В литературе он также именуется экстраполяционным.

Метод Рунге-Кутта относится к группе явных методов, был разработан немецкими математиками К. Рунге и М. В. Куттой. Получил широкое распространение.

# Постановка задачи

Необходимо решить ОДУ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.1) |

различными методами:

1. аналитически (например, с использованием стандартной процедуры MATLAB dsolve);
2. методом из семейства методов Адамса в соответствии с вариантом;
3. методом Рунге-Кутта (стандартная процедура MATLAB - ode45).

Построить графики решений. Сравнить полученные результаты.

Исследовать зависимость погрешности от выбора шага.

Вариант № 2:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (1.2) |

Из семейства методов Адамса требуется использовать метод Адамса-Башфорта 2 порядка.

# Приведение ДУ к требуемому виду

Для применения численных методов решения ОДУ, необходимо от ЛДУ третьего порядка (1.1) перейти к системе из ЛДУ первого порядка.

Осуществим замены переменных:

Тогда имеем:

В итоге получаем ДУ вида:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.1) |

где

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | (2.2) |

# Решение ДУ аналитически

Для решения ОДУ (1.1) используем сайт Wolfram Alpha[2]. Для этого вводим уравнение и жмем кнопку «compute input».

В итоге получаем решение:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (3.1) |

Данному решению соответствует график y(t) (см. рис. 1)

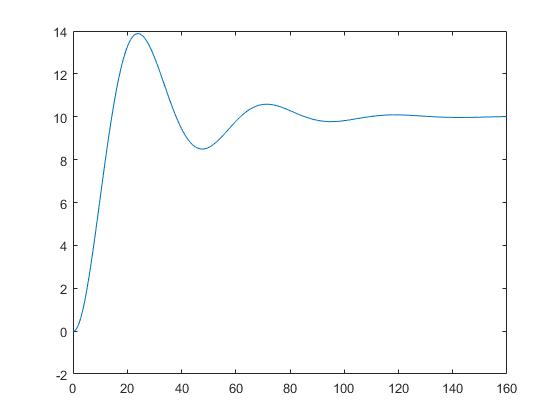


Рисунок 1. Решение заданного ОДУ аналитически

# Решение ДУ численными методами

## Метод Адамса-Башфорта 2 порядка

Из литературы известна расчетная формула(4.1) для группы методов Адамса-Башфорта .

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.1) |

Следовательно, для метода 2 порядка расчетная формула имеет вид:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.2) |

Для вещественных отрицательных собственных значений ограничения на выбор шага имеют вид: . В моем случае шаг был выбран экспериментально и равняется

Применение метода Адамса-Башфорта к уравнению (2.1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.3) |

Получено численное решение, представленное в приложении 2.

Данному решению соответствует график y(t) (см. рис. 2)

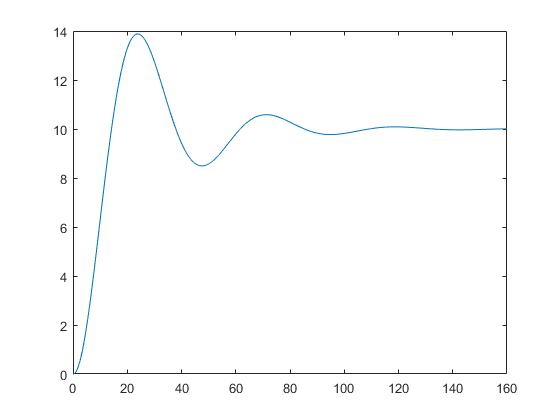


Рисунок 2 – Решение заданного ОДУ методом Адамса-Башфорта 2 порядка.

Код программы приведен в приложении 1.

## Метод Рунге-Кутта

Разностная схема метода Рунге-Кутта в общем виде выглядит так:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.4) |
|  |  |
|  |  |

Разностная схема метода Рунге-Кутта 4 порядка описывается формулами:

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.5) |
|  |  |
|  |  |

Поскольку данный метод является явным, есть ограничение на шаг h (в моем случае шаг h=0.2).

Применение метода Рунге-Кутта 4 порядка к уравнению (2.1):

|  |  |
| --- | --- |
|  | (4.6) |

Получено численное решение, представленное в приложении 4.

Данному решению соответствует график y(t) (см. рис. 3)

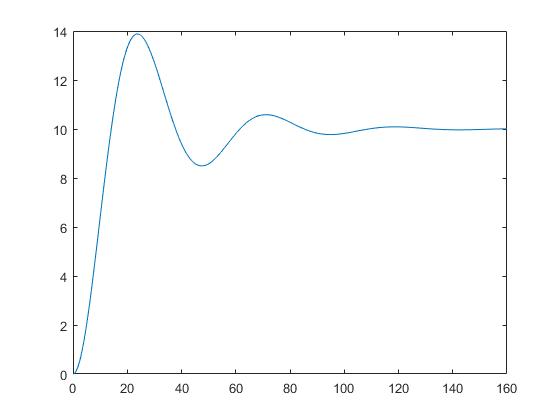


Рисунок 3 – Решение заданного ОДУ методом Рунге-Кутта 4 порядка.

Код программы приведен в приложении 3.

# Сравнение полученных решений

## Расчет погрешностей

Построены графики отличия аналитического решения (3.1) от решений методами Адамса-Башфорта 2 порядка (4.3) и Ругне-Кутта 4 порядка (4.5).

Код программы приведен в приложении 5-6.

График отличия аналитического решения от решения методом Адамса-Башфорта 2 порядка (рис. 4)

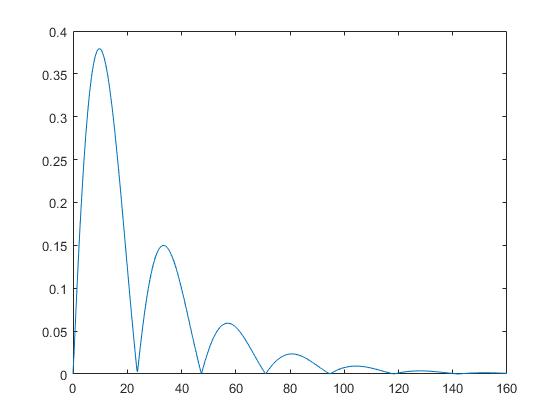


Рис. 4 – график отличия аналитического решения от решения методом Адамса- Башфорта 2 порядка

График отличия аналитического решения от решения методом Рунге-Кутта 4 порядка (рис. 5)

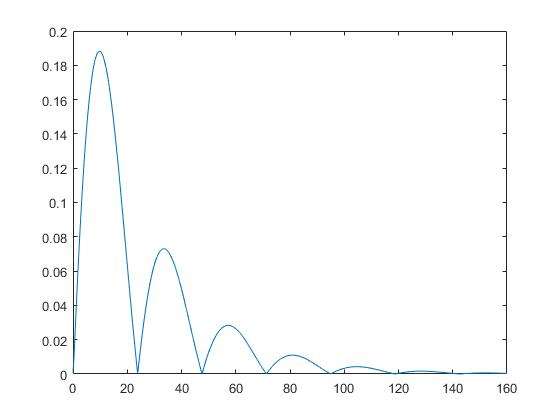


Рис. 5 – график отличия аналитического решения от решения методом Рунге-Кутта 4 порядка

## Исследование зависимости погрешности от шага (для метода Адамса)

График отличия аналитического решения от решения методом Адамса-Башфорта 2 порядка с шагом h = 0.05 (рис. 6)

График отличия аналитического решения от решения методом Адамса-Башфорта 2 порядка с шагом h = 0.1 (рис. 7)

Погрешность при h = 0.05 меньше погрешности при h = 0.1 приблизительно в 2 раза.

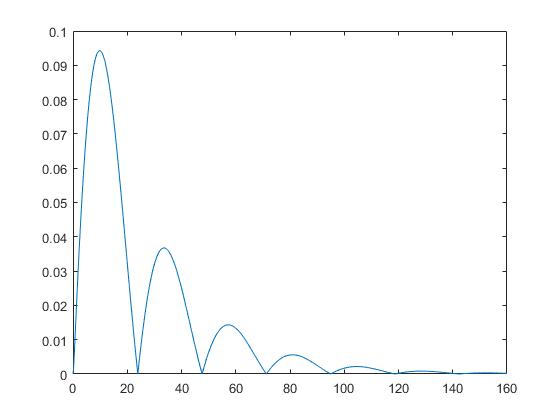


Рис. 6 - График отличия аналитического решения от решения методом Адамса- Башфорта 2 порядка с шагом h = 0.05

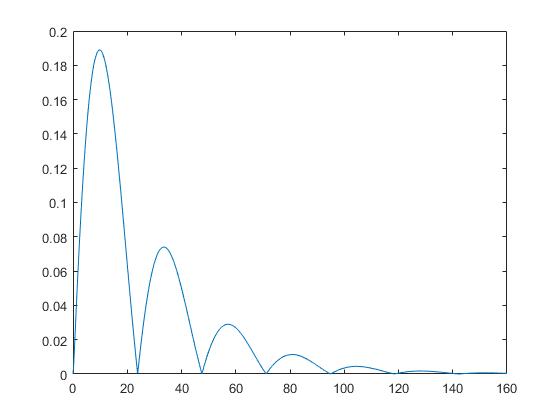


Рис. 7 - График отличия аналитического решения от решения методом Адамса- Башфорта 2 порядка с шагом h = 0.1

# Заключение

В ходе данной работы:

* закреплены знания по решению ЛДУ численными методами: методом Адамса-Башфорта 2 порядка и стандартной процедурой ode45;
* реализована корректно работающая программа, которая строит графики решений (тремя способами) и необходимых погрешностей;
* проведено исследование метода Адамса-Башфорта 2 порядка с точки зрения влияния выбора шага на погрешность решения

Из анализа построенных решений численными методами можно сделать выводы о том, что оба метода применимы в нахождении приблизительного решения ОДУ.

Метод Рунге-Кутта 4 порядка оказался точнее Адамса-Башфорта 2 порядка. Их погрешности отличаются в 2 раза. Это объясняется выбором шага и порядком методов.

Подробное рассмотрение зависимости погрешности от шага в методе Адамса-Башфорта 2 порядка показало, что погрешность прямо пропорциональна выбранному шагу h.

# Список литературы

1. Прохоров Ю.В. Математический энциклопедический словарь. Советкая энциклопедия, 1988.

2. Wolfram Alpha [Electronic resource]. URL: https://www.wolframalpha.com/input?i=12\*y%27%27%27%2B53.2\*y%27%27%2B4.4\*y%27%2By%3D10%2C+y%280%29%3D0%2C+y%27%280%29%3D0%2C+y%27%27%280%29%3D0 (accessed: 21.03.2022).

3. А.Н. Кирсяев, В.Е. Куприянов. Вычислительная математика: Конспект лекций. САНКТ- ПЕТЕРБУРГ: САНКТ- ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2011. 83–94 p.

# Приложение 1.

Код программы для решения ОДУ методом Адамса-Башфорта 2 порядка.

clear; clc;

a0=1;

a1=4.4;

a2=53.2;

a3=12;

u=10;

X0 = [0; 0; 0];

z1 = (-a0/a3);

z2 = (-a1/a3);

z3 = (-a2/a3);

z4 = (1/a3);

A=[0 1 0; 0 0 1; z1 z2 z3];

B=[0;0;z4];

E = eye(3);

h=0.2;

t=0;

X = (A\*X0+B\*u)\*h+X0;

T\_g=[];

X\_g=[];

i=1;

while t<=160

X\_next=X+h\*((3/2)\*(A\*X+B\*u)-(1/2)\*(A\*X0+B\*u));

X\_g(i,:)=X\_next(1);

T\_g(i,:)=t;

X0=X;

X=X\_next;

t=t+h;

i=i+1;

end

plot(T\_g,X\_g)

# Приложение 2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0 | 13.3761 | 9.3449 | 9.8365 | 10.2622 | 9.8251 | 10.0856 | 9.9675 |
| 0.0150 | 13.4327 | 9.2980 | 9.8623 | 10.2513 | 9.8286 | 10.0851 | 9.9672 |
| 0.0301 | 13.4858 | 9.2523 | 9.8878 | 10.2403 | 9.8321 | 10.0845 | 9.9669 |
| 0.0579 | 13.5354 | 9.2079 | 9.9129 | 10.2293 | 9.8357 | 10.0839 | 9.9667 |
| 0.0880 | 13.5815 | 9.1648 | 9.9378 | 10.2183 | 9.8394 | 10.0832 | 9.9665 |
| 0.1291 | 13.6242 | 9.1230 | 9.9623 | 10.2074 | 9.8432 | 10.0824 | 9.9664 |
| 0.1737 | 13.6634 | 9.0826 | 9.9864 | 10.1964 | 9.8470 | 10.0816 | 9.9662 |
| 0.2277 | 13.6993 | 9.0435 | 10.0102 | 10.1855 | 9.8508 | 10.0808 | 9.9661 |
| 0.2861 | 13.7317 | 9.0057 | 10.0335 | 10.1746 | 9.8548 | 10.0799 | 9.9660 |
| 0.3527 | 13.7608 | 8.9693 | 10.0565 | 10.1637 | 9.8587 | 10.0789 | 9.9660 |
| 0.4241 | 13.7866 | 8.9343 | 10.0791 | 10.1529 | 9.8627 | 10.0779 | 9.9660 |
| 0.5030 | 13.8091 | 8.9006 | 10.1012 | 10.1421 | 9.8668 | 10.0769 | 9.9660 |
| 0.5867 | 13.8284 | 8.8683 | 10.1230 | 10.1315 | 9.8709 | 10.0758 | 9.9660 |
| 0.6771 | 13.8444 | 8.8373 | 10.1443 | 10.1208 | 9.8750 | 10.0747 | 9.9661 |
| 0.7725 | 13.8573 | 8.8078 | 10.1651 | 10.1103 | 9.8791 | 10.0735 | 9.9661 |
| 0.8740 | 13.8670 | 8.7796 | 10.1855 | 10.0998 | 9.8833 | 10.0723 | 9.9662 |
| 0.9802 | 13.8737 | 8.7528 | 10.2054 | 10.0894 | 9.8875 | 10.0711 | 9.9664 |
| 1.0921 | 13.8772 | 8.7273 | 10.2249 | 10.0792 | 9.8917 | 10.0699 | 9.9665 |
| 1.2086 | 13.8778 | 8.7033 | 10.2438 | 10.0690 | 9.8960 | 10.0686 | 9.9667 |
| 1.3303 | 13.8755 | 8.6806 | 10.2623 | 10.0589 | 9.9002 | 10.0672 | 9.9669 |
| 1.4564 | 13.8702 | 8.6592 | 10.2803 | 10.0490 | 9.9045 | 10.0659 | 9.9671 |
| 1.5871 | 13.8620 | 8.6392 | 10.2978 | 10.0391 | 9.9087 | 10.0645 | 9.9673 |
| 1.7220 | 13.8511 | 8.6206 | 10.3148 | 10.0294 | 9.9130 | 10.0631 | 9.9676 |
| 1.8612 | 13.8374 | 8.6033 | 10.3313 | 10.0199 | 9.9172 | 10.0616 | 9.9679 |
| 2.0043 | 13.8210 | 8.5874 | 10.3472 | 10.0104 | 9.9215 | 10.0602 | 9.9682 |
| 2.1513 | 13.8020 | 8.5727 | 10.3627 | 10.0011 | 9.9257 | 10.0587 | 9.9685 |
| 2.3018 | 13.7803 | 8.5594 | 10.3776 | 9.9920 | 9.9300 | 10.0572 | 9.9688 |
| 2.4559 | 13.7562 | 8.5474 | 10.3920 | 9.9830 | 9.9342 | 10.0556 | 9.9692 |
| 2.6132 | 13.7295 | 8.5367 | 10.4059 | 9.9741 | 9.9384 | 10.0541 | 9.9696 |
| 2.7736 | 13.7005 | 8.5273 | 10.4193 | 9.9654 | 9.9426 | 10.0525 | 9.9700 |
| 2.9370 | 13.6691 | 8.5191 | 10.4321 | 9.9569 | 9.9467 | 10.0510 | 9.9704 |
| 3.1032 | 13.6354 | 8.5122 | 10.4444 | 9.9486 | 9.9509 | 10.0494 | 9.9708 |
| 3.2719 | 13.5995 | 8.5066 | 10.4562 | 9.9404 | 9.9550 | 10.0478 | 9.9712 |
| 3.4432 | 13.5614 | 8.5021 | 10.4674 | 9.9324 | 9.9591 | 10.0462 | 9.9717 |
| 3.6166 | 13.5212 | 8.4989 | 10.4781 | 9.9246 | 9.9631 | 10.0445 | 9.9722 |
| 3.7922 | 13.4790 | 8.4968 | 10.4882 | 9.9169 | 9.9671 | 10.0429 | 9.9726 |
| 3.9697 | 13.4348 | 8.4960 | 10.4979 | 9.9095 | 9.9711 | 10.0413 | 9.9731 |
| 4.1490 | 13.3887 | 8.4963 | 10.5070 | 9.9022 | 9.9750 | 10.0396 | 9.9736 |
| 4.3299 | 13.3408 | 8.4977 | 10.5155 | 9.8951 | 9.9789 | 10.0380 | 9.9742 |
| 4.5122 | 13.2910 | 8.5003 | 10.5236 | 9.8882 | 9.9827 | 10.0363 | 9.9747 |
| 4.6958 | 13.2396 | 8.5039 | 10.5311 | 9.8815 | 9.9865 | 10.0347 | 9.9752 |
| 4.8806 | 13.1865 | 8.5086 | 10.5381 | 9.8750 | 9.9903 | 10.0330 | 9.9758 |
| 5.0663 | 13.1318 | 8.5144 | 10.5445 | 9.8687 | 9.9940 | 10.0314 | 9.9764 |
| 5.2528 | 13.0757 | 8.5212 | 10.5505 | 9.8626 | 9.9976 | 10.0297 | 9.9769 |
| 5.4399 | 13.0180 | 8.5291 | 10.5559 | 9.8567 | 10.0012 | 10.0281 | 9.9775 |
| 5.6276 | 12.9590 | 8.5379 | 10.5609 | 9.8510 | 10.0047 | 10.0264 | 9.9781 |
| 5.8156 | 12.8987 | 8.5477 | 10.5653 | 9.8455 | 10.0082 | 10.0248 | 9.9787 |
| 6.0038 | 12.8371 | 8.5585 | 10.5692 | 9.8402 | 10.0116 | 10.0232 | 9.9793 |
| 6.1920 | 12.7744 | 8.5701 | 10.5727 | 9.8351 | 10.0149 | 10.0215 | 9.9799 |
| 6.3802 | 12.7105 | 8.5827 | 10.5756 | 9.8302 | 10.0182 | 10.0199 | 9.9805 |
| 6.5681 | 12.6456 | 8.5962 | 10.5781 | 9.8256 | 10.0214 | 10.0183 | 9.9811 |
| 6.7556 | 12.5797 | 8.6105 | 10.5801 | 9.8211 | 10.0245 | 10.0167 | 9.9818 |
| 6.9427 | 12.5129 | 8.6256 | 10.5816 | 9.8168 | 10.0276 | 10.0152 | 9.9824 |
| 7.1291 | 12.4453 | 8.6416 | 10.5826 | 9.8128 | 10.0306 | 10.0136 | 9.9830 |
| 7.3147 | 12.3768 | 8.6583 | 10.5832 | 9.8089 | 10.0335 | 10.0121 | 9.9836 |
| 7.4995 | 12.3077 | 8.6758 | 10.5833 | 9.8053 | 10.0364 | 10.0105 | 9.9843 |
| 7.6832 | 12.2378 | 8.6940 | 10.5830 | 9.8019 | 10.0392 | 10.0090 | 9.9849 |
| 7.8657 | 12.1674 | 8.7129 | 10.5823 | 9.7986 | 10.0419 | 10.0075 | 9.9856 |
| 8.0470 | 12.0965 | 8.7325 | 10.5811 | 9.7956 | 10.0445 | 10.0060 | 9.9862 |
| 8.2269 | 12.0251 | 8.7527 | 10.5795 | 9.7928 | 10.0471 | 10.0046 | 9.9868 |
| 8.4053 | 11.9532 | 8.7736 | 10.5775 | 9.7902 | 10.0496 | 10.0031 | 9.9875 |
| 8.5821 | 11.8811 | 8.7950 | 10.5750 | 9.7877 | 10.0520 | 10.0017 | 9.9881 |
| 8.7571 | 11.8086 | 8.8171 | 10.5722 | 9.7855 | 10.0543 | 10.0003 | 9.9888 |
| 8.9303 | 11.7359 | 8.8397 | 10.5690 | 9.7835 | 10.0566 | 9.9989 | 9.9894 |
| 9.1016 | 11.6631 | 8.8628 | 10.5654 | 9.7817 | 10.0588 | 9.9976 | 9.9900 |
| 9.2709 | 11.5901 | 8.8864 | 10.5614 | 9.7800 | 10.0609 | 9.9962 | 9.9907 |
| 9.4380 | 11.5171 | 8.9105 | 10.5571 | 9.7786 | 10.0629 | 9.9949 | 9.9913 |
| 9.6029 | 11.4441 | 8.9350 | 10.5524 | 9.7774 | 10.0648 | 9.9936 | 9.9919 |
| 9.7655 | 11.3712 | 8.9600 | 10.5474 | 9.7763 | 10.0667 | 9.9924 | 9.9925 |
| 9.9257 | 11.2983 | 8.9853 | 10.5420 | 9.7754 | 10.0684 | 9.9912 | 9.9932 |
| 10.0834 | 11.2257 | 9.0111 | 10.5363 | 9.7747 | 10.0701 | 9.9900 | 9.9938 |
| 10.2385 | 11.1532 | 9.0371 | 10.5303 | 9.7742 | 10.0718 | 9.9888 | 9.9944 |
| 10.3910 | 11.0811 | 9.0635 | 10.5240 | 9.7739 | 10.0733 | 9.9876 | 9.9950 |
| 10.5408 | 11.0092 | 9.0902 | 10.5174 | 9.7738 | 10.0747 | 9.9865 | 9.9956 |
| 10.6878 | 10.9378 | 9.1171 | 10.5105 | 9.7738 | 10.0761 | 9.9854 | 9.9962 |
| 10.8319 | 10.8667 | 9.1443 | 10.5033 | 9.7740 | 10.0774 | 9.9843 | 9.9968 |
| 10.9732 | 10.7961 | 9.1717 | 10.4958 | 9.7744 | 10.0786 | 9.9833 | 9.9973 |
| 11.1114 | 10.7260 | 9.1993 | 10.4881 | 9.7749 | 10.0798 | 9.9823 | 9.9979 |
| 11.2467 | 10.6565 | 9.2271 | 10.4801 | 9.7756 | 10.0808 | 9.9813 | 9.9985 |
| 11.3788 | 10.5876 | 9.2550 | 10.4720 | 9.7764 | 10.0818 | 9.9803 | 9.9990 |
| 11.5078 | 10.5194 | 9.2830 | 10.4635 | 9.7774 | 10.0827 | 9.9794 | 9.9996 |
| 11.6336 | 10.4518 | 9.3112 | 10.4549 | 9.7786 | 10.0835 | 9.9785 | 10.0001 |
| 11.7561 | 10.3849 | 9.3394 | 10.4460 | 9.7799 | 10.0843 | 9.9777 | 10.0007 |
| 11.8754 | 10.3188 | 9.3677 | 10.4370 | 9.7814 | 10.0850 | 9.9768 | 10.0012 |
| 11.9914 | 10.2536 | 9.3960 | 10.4277 | 9.7830 | 10.0856 | 9.9760 | 10.0017 |
| 12.1040 | 10.1891 | 9.4243 | 10.4183 | 9.7847 | 10.0861 | 9.9753 | 10.0022 |
| 12.2132 | 10.1256 | 9.4526 | 10.4087 | 9.7866 | 10.0865 | 9.9745 | 10.0027 |
| 12.3190 | 10.0629 | 9.4809 | 10.3990 | 9.7886 | 10.0869 | 9.9738 | 10.0032 |
| 12.4214 | 10.0012 | 9.5091 | 10.3891 | 9.7908 | 10.0872 | 9.9732 | 10.0036 |
| 12.5203 | 9.9405 | 9.5373 | 10.3790 | 9.7930 | 10.0875 | 9.9725 | 10.0041 |
| 12.6157 | 9.8808 | 9.5653 | 10.3689 | 9.7954 | 10.0876 | 9.9719 | 10.0046 |
| 12.7077 | 9.8221 | 9.5932 | 10.3586 | 9.7979 | 10.0877 | 9.9713 | 10.0050 |
| 12.7961 | 9.7645 | 9.6210 | 10.3482 | 9.8005 | 10.0877 | 9.9708 | 10.0054 |
| 12.8810 | 9.7080 | 9.6487 | 10.3377 | 9.8033 | 10.0877 | 9.9702 | 10.0059 |
| 12.9623 | 9.6526 | 9.6762 | 10.3271 | 9.8061 | 10.0876 | 9.9698 | 10.0063 |
| 13.0401 | 9.5983 | 9.7035 | 10.3164 | 9.8090 | 10.0874 | 9.9693 | 10.0067 |
| 13.1144 | 9.5452 | 9.7305 | 10.3057 | 9.8121 | 10.0872 | 9.9689 | 10.0070 |
| 13.1851 | 9.4933 | 9.7574 | 10.2949 | 9.8152 | 10.0869 | 9.9685 | 10.0074 |
| 13.2523 | 9.4426 | 9.7840 | 10.2841 | 9.8184 | 10.0865 | 9.9681 | 10.0078 |
| 13.3160 | 9.3931 | 9.8104 | 10.2732 | 9.8217 | 10.0861 | 9.9678 | 10.0081 |

# Приложение 3.

Код программы для решения ОДУ методом Рунге-Кутта

clear;

a0=1;

a1=4.4;

a2=53.2;

a3=12;

u=10;

X0 = [0; 0; 0];

z1 = (-a0/a3);

z2 = (-a1/a3);

z3 = (-a2/a3);

z4 = (1/a3);

A=[0 1 0; 0 0 1; z1 z2 z3];

B=[0;0;z4];

E = eye(3);

h=0.2;

t=0;

f=A\*X0+B\*u;

while t<=160

f=A\*X0+B\*u;

l1=f;

l2=A\*(X0+l1\*h/2)+B\*u;

l3=A\*(X0+l2\*h/2)+B\*u;

l4=A\*(X0+l3\*h)+B\*u;

X\_res = X0 + h\*(l1+2\*l2+2\*l3+l4)/6

X0=X\_res;

t=t+h;

end

from = 0;

to = 160;

X0 = [0; 0; 0];

[T, X] = ode45(@(t,x) A\*x + B\*u, [from to], X0);

plot(T, X)

# Приложение 4.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.0009 | 13.3145 | 9.3953 | 9.8082 | 10.2746 | 9.8210 | 10.0864 | 9.9677 |
| 0.0060 | 13.3747 | 9.3470 | 9.8344 | 10.2637 | 9.8243 | 10.0859 | 9.9674 |
| 0.0172 | 13.4315 | 9.2999 | 9.8602 | 10.2527 | 9.8278 | 10.0854 | 9.9671 |
| 0.0352 | 13.4847 | 9.2541 | 9.8857 | 10.2418 | 9.8313 | 10.0848 | 9.9669 |
| 0.0602 | 13.5344 | 9.2097 | 9.9110 | 10.2308 | 9.8350 | 10.0842 | 9.9666 |
| 0.0923 | 13.5806 | 9.1665 | 9.9359 | 10.2198 | 9.8386 | 10.0835 | 9.9665 |
| 0.1314 | 13.6234 | 9.1246 | 9.9604 | 10.2088 | 9.8424 | 10.0827 | 9.9663 |
| 0.1773 | 13.6628 | 9.0841 | 9.9846 | 10.1978 | 9.8462 | 10.0819 | 9.9661 |
| 0.2300 | 13.6988 | 9.0449 | 10.0084 | 10.1868 | 9.8501 | 10.0811 | 9.9660 |
| 0.2892 | 13.7314 | 9.0070 | 10.0318 | 10.1759 | 9.8540 | 10.0802 | 9.9659 |
| 0.3549 | 13.7606 | 8.9705 | 10.0549 | 10.1650 | 9.8579 | 10.0793 | 9.9659 |
| 0.4268 | 13.7865 | 8.9354 | 10.0775 | 10.1542 | 9.8620 | 10.0783 | 9.9659 |
| 0.5049 | 13.8091 | 8.9016 | 10.0997 | 10.1434 | 9.8660 | 10.0772 | 9.9659 |
| 0.5890 | 13.8285 | 8.8692 | 10.1215 | 10.1327 | 9.8701 | 10.0762 | 9.9659 |
| 0.6789 | 13.8447 | 8.8382 | 10.1428 | 10.1221 | 9.8742 | 10.0751 | 9.9659 |
| 0.7744 | 13.8577 | 8.8085 | 10.1637 | 10.1115 | 9.8784 | 10.0739 | 9.9660 |
| 0.8754 | 13.8675 | 8.7803 | 10.1842 | 10.1010 | 9.8825 | 10.0727 | 9.9661 |
| 0.9818 | 13.8743 | 8.7534 | 10.2041 | 10.0906 | 9.8868 | 10.0715 | 9.9662 |
| 1.0933 | 13.8780 | 8.7278 | 10.2236 | 10.0803 | 9.8910 | 10.0702 | 9.9664 |
| 1.2098 | 13.8787 | 8.7037 | 10.2427 | 10.0701 | 9.8952 | 10.0689 | 9.9665 |
| 1.3312 | 13.8764 | 8.6809 | 10.2612 | 10.0600 | 9.8995 | 10.0676 | 9.9667 |
| 1.4572 | 13.8713 | 8.6594 | 10.2793 | 10.0500 | 9.9037 | 10.0662 | 9.9669 |
| 1.5877 | 13.8632 | 8.6393 | 10.2968 | 10.0402 | 9.9080 | 10.0649 | 9.9672 |
| 1.7225 | 13.8524 | 8.6206 | 10.3139 | 10.0304 | 9.9123 | 10.0634 | 9.9674 |
| 1.8615 | 13.8388 | 8.6032 | 10.3304 | 10.0208 | 9.9165 | 10.0620 | 9.9677 |
| 2.0045 | 13.8225 | 8.5872 | 10.3464 | 10.0114 | 9.9208 | 10.0605 | 9.9680 |
| 2.1512 | 13.8036 | 8.5725 | 10.3619 | 10.0021 | 9.9250 | 10.0591 | 9.9683 |
| 2.3016 | 13.7821 | 8.5591 | 10.3769 | 9.9929 | 9.9293 | 10.0575 | 9.9687 |
| 2.4555 | 13.7580 | 8.5470 | 10.3914 | 9.9838 | 9.9335 | 10.0560 | 9.9690 |
| 2.6127 | 13.7315 | 8.5362 | 10.4053 | 9.9750 | 9.9377 | 10.0545 | 9.9694 |
| 2.7730 | 13.7026 | 8.5267 | 10.4188 | 9.9663 | 9.9419 | 10.0529 | 9.9698 |
| 2.9362 | 13.6713 | 8.5184 | 10.4316 | 9.9577 | 9.9461 | 10.0513 | 9.9702 |
| 3.1022 | 13.6377 | 8.5114 | 10.4440 | 9.9493 | 9.9502 | 10.0497 | 9.9706 |
| 3.2708 | 13.6019 | 8.5057 | 10.4558 | 9.9411 | 9.9544 | 10.0481 | 9.9711 |
| 3.4419 | 13.5639 | 8.5012 | 10.4671 | 9.9331 | 9.9585 | 10.0465 | 9.9715 |
| 3.6153 | 13.5238 | 8.4979 | 10.4778 | 9.9252 | 9.9625 | 10.0449 | 9.9720 |
| 3.7907 | 13.4817 | 8.4957 | 10.4881 | 9.9176 | 9.9665 | 10.0433 | 9.9725 |
| 3.9681 | 13.4376 | 8.4948 | 10.4977 | 9.9101 | 9.9705 | 10.0416 | 9.9730 |
| 4.1472 | 13.3915 | 8.4950 | 10.5069 | 9.9028 | 9.9745 | 10.0400 | 9.9735 |
| 4.3280 | 13.3437 | 8.4964 | 10.5155 | 9.8956 | 9.9784 | 10.0383 | 9.9740 |
| 4.5102 | 13.2940 | 8.4988 | 10.5236 | 9.8887 | 9.9822 | 10.0367 | 9.9745 |
| 4.6937 | 13.2427 | 8.5024 | 10.5312 | 9.8820 | 9.9860 | 10.0350 | 9.9751 |
| 4.8783 | 13.1896 | 8.5071 | 10.5382 | 9.8755 | 9.9898 | 10.0334 | 9.9756 |
| 5.0639 | 13.1350 | 8.5128 | 10.5447 | 9.8691 | 9.9935 | 10.0317 | 9.9762 |
| 5.2503 | 13.0789 | 8.5196 | 10.5508 | 9.8630 | 9.9971 | 10.0300 | 9.9767 |
| 5.4373 | 13.0214 | 8.5273 | 10.5563 | 9.8570 | 10.0007 | 10.0284 | 9.9773 |
| 5.6249 | 12.9624 | 8.5361 | 10.5612 | 9.8513 | 10.0043 | 10.0267 | 9.9779 |
| 5.8128 | 12.9022 | 8.5458 | 10.5657 | 9.8458 | 10.0077 | 10.0251 | 9.9785 |
| 6.0009 | 12.8406 | 8.5565 | 10.5697 | 9.8405 | 10.0112 | 10.0235 | 9.9791 |
| 6.1890 | 12.7779 | 8.5682 | 10.5732 | 9.8353 | 10.0145 | 10.0219 | 9.9797 |
| 6.3771 | 12.7141 | 8.5807 | 10.5762 | 9.8304 | 10.0178 | 10.0202 | 9.9803 |
| 6.5650 | 12.6493 | 8.5941 | 10.5787 | 9.8257 | 10.0210 | 10.0186 | 9.9810 |
| 6.7524 | 12.5834 | 8.6083 | 10.5807 | 9.8212 | 10.0242 | 10.0170 | 9.9816 |
| 6.9394 | 12.5167 | 8.6234 | 10.5823 | 9.8169 | 10.0273 | 10.0155 | 9.9822 |
| 7.1258 | 12.4490 | 8.6393 | 10.5833 | 9.8129 | 10.0303 | 10.0139 | 9.9828 |
| 7.3113 | 12.3806 | 8.6560 | 10.5840 | 9.8090 | 10.0332 | 10.0123 | 9.9835 |
| 7.4960 | 12.3115 | 8.6734 | 10.5842 | 9.8053 | 10.0361 | 10.0108 | 9.9841 |
| 7.6797 | 12.2417 | 8.6916 | 10.5839 | 9.8018 | 10.0389 | 10.0093 | 9.9848 |
| 7.8622 | 12.1713 | 8.7105 | 10.5832 | 9.7986 | 10.0416 | 10.0078 | 9.9854 |
| 8.0434 | 12.1004 | 8.7300 | 10.5820 | 9.7955 | 10.0443 | 10.0063 | 9.9860 |
| 8.2233 | 12.0290 | 8.7502 | 10.5805 | 9.7927 | 10.0469 | 10.0048 | 9.9867 |
| 8.4016 | 11.9572 | 8.7711 | 10.5785 | 9.7900 | 10.0494 | 10.0034 | 9.9873 |
| 8.5784 | 11.8850 | 8.7925 | 10.5761 | 9.7876 | 10.0518 | 10.0019 | 9.9880 |
| 8.7534 | 11.8125 | 8.8145 | 10.5733 | 9.7853 | 10.0542 | 10.0005 | 9.9886 |
| 8.9266 | 11.7399 | 8.8371 | 10.5701 | 9.7833 | 10.0564 | 9.9991 | 9.9893 |
| 9.0979 | 11.6670 | 8.8602 | 10.5665 | 9.7814 | 10.0586 | 9.9978 | 9.9899 |
| 9.2671 | 11.5941 | 8.8838 | 10.5626 | 9.7798 | 10.0607 | 9.9964 | 9.9905 |
| 9.4343 | 11.5210 | 8.9079 | 10.5583 | 9.7783 | 10.0628 | 9.9951 | 9.9912 |
| 9.5992 | 11.4480 | 8.9324 | 10.5536 | 9.7770 | 10.0647 | 9.9938 | 9.9918 |
| 9.7618 | 11.3751 | 8.9573 | 10.5486 | 9.7760 | 10.0666 | 9.9926 | 9.9924 |
| 9.9220 | 11.3022 | 8.9827 | 10.5433 | 9.7751 | 10.0684 | 9.9913 | 9.9930 |
| 10.0797 | 11.2295 | 9.0084 | 10.5376 | 9.7744 | 10.0701 | 9.9901 | 9.9936 |
| 10.2349 | 11.1571 | 9.0344 | 10.5316 | 9.7738 | 10.0717 | 9.9889 | 9.9943 |
| 10.3874 | 11.0849 | 9.0608 | 10.5253 | 9.7735 | 10.0733 | 9.9878 | 9.9949 |
| 10.5372 | 11.0130 | 9.0875 | 10.5187 | 9.7733 | 10.0747 | 9.9866 | 9.9955 |
| 10.6843 | 10.9415 | 9.1144 | 10.5119 | 9.7733 | 10.0761 | 9.9855 | 9.9961 |
| 10.8284 | 10.8704 | 9.1416 | 10.5047 | 9.7735 | 10.0774 | 9.9844 | 9.9967 |
| 10.9697 | 10.7998 | 9.1690 | 10.4973 | 9.7739 | 10.0787 | 9.9834 | 9.9972 |
| 11.1080 | 10.7297 | 9.1966 | 10.4896 | 9.7744 | 10.0798 | 9.9824 | 9.9978 |
| 11.2433 | 10.6601 | 9.2244 | 10.4816 | 9.7750 | 10.0809 | 9.9814 | 9.9984 |
| 11.3755 | 10.5912 | 9.2523 | 10.4734 | 9.7759 | 10.0819 | 9.9804 | 9.9989 |
| 11.5045 | 10.5228 | 9.2804 | 10.4650 | 9.7769 | 10.0828 | 9.9795 | 9.9995 |
| 11.6304 | 10.4552 | 9.3085 | 10.4564 | 9.7780 | 10.0837 | 9.9786 | 10.0000 |
| 11.7530 | 10.3883 | 9.3368 | 10.4475 | 9.7793 | 10.0844 | 9.9777 | 10.0006 |
| 11.8724 | 10.3222 | 9.3651 | 10.4385 | 9.7808 | 10.0851 | 9.9769 | 10.0011 |
| 11.9884 | 10.2568 | 9.3934 | 10.4292 | 9.7824 | 10.0857 | 9.9761 | 10.0016 |
| 12.1011 | 10.1923 | 9.4217 | 10.4198 | 9.7841 | 10.0862 | 9.9753 | 10.0021 |
| 12.2104 | 10.1287 | 9.4500 | 10.4102 | 9.7859 | 10.0867 | 9.9746 | 10.0026 |
| 12.3163 | 10.0660 | 9.4783 | 10.4005 | 9.7879 | 10.0871 | 9.9739 | 10.0031 |
| 12.4188 | 10.0042 | 9.5066 | 10.3906 | 9.7901 | 10.0874 | 9.9732 | 10.0036 |
| 12.5178 | 9.9434 | 9.5348 | 10.3806 | 9.7923 | 10.0877 | 9.9725 | 10.0040 |
| 12.6133 | 9.8837 | 9.5628 | 10.3704 | 9.7947 | 10.0878 | 9.9719 | 10.0045 |
| 12.7054 | 9.8249 | 9.5908 | 10.3601 | 9.7972 | 10.0879 | 9.9713 | 10.0049 |
| 12.7939 | 9.7672 | 9.6186 | 10.3497 | 9.7998 | 10.0880 | 9.9708 | 10.0054 |
| 12.8789 | 9.7106 | 9.6463 | 10.3392 | 9.8025 | 10.0879 | 9.9702 | 10.0058 |
| 12.9603 | 9.6551 | 9.6738 | 10.3286 | 9.8054 | 10.0878 | 9.9697 | 10.0062 |
| 13.0382 | 9.6008 | 9.7012 | 10.3180 | 9.8083 | 10.0877 | 9.9693 | 10.0066 |
| 13.1126 | 9.5476 | 9.7283 | 10.3072 | 9.8113 | 10.0875 | 9.9688 | 10.0070 |
| 13.1835 | 9.4956 | 9.7552 | 10.2964 | 9.8144 | 10.0872 | 9.9684 | 10.0074 |
| 13.2508 | 9.4448 | 9.7818 | 10.2856 | 9.8176 | 10.0868 | 9.9681 | 10.0077 |

# Приложение 5.

clear; clc;

analytical\_solution = @(t) ((15\*exp(-t\*(16699/(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) + (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 133/90))\*(349045200000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(5/3) - 31430107800\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) - 1054909875600\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) - 2364\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2) + 53067\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2)\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 35910\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2)\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 34443590320))/((8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(135261900\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 65610000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 278856601)) - (exp(t\*(16699/(16200\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) + (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)/2 - 133/90))\*cos((3^(1/2)\*t\*(16699/(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) - (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)))/2)\*(11970\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(399\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2) - 3997740600\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 10820952000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 2624400000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 5340815420))/(6\*(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(135261900\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 65610000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 278856601)) - (3^(1/2)\*exp(t\*(16699/(16200\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) + (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)/2 - 133/90))\*sin((3^(1/2)\*t\*(16699/(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) - (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)))/2)\*(11970\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(399\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2) - 3997740600\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 5410476000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) - 5813448620))/(6\*(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) - 16699)\*(135261900\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 65610000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 278856601)) + 10);

% analytical\_solution = @(t) (10.0 - 9.99\*exp(-0.03991\*t)\*cos(0.1325\*t) - 3.348\*exp(-0.03991\*t)\*sin(0.1325\*t) - 0.01028\*exp(-4.354\*t));

a0=1;

a1=4.4;

a2=53.2;

a3=12;

u=10;

X0 = [0; 0; 0];

z1 = (-a0/a3);

z2 = (-a1/a3);

z3 = (-a2/a3);

z4 = (1/a3);

A=[0 1 0; 0 0 1; z1 z2 z3];

B=[0;0;z4];

E = eye(3);

h=0.2;

t=0;

X = (A\*X0+B\*u)\*h+X0;

Y\_bashfort\_solution=[];

X\_bashfort\_solution=[];

Y\_analytical\_solution=[];

X\_analytical\_solution=[];

i=1;

while t<=160

X\_next=X+h\*((3/2)\*(A\*X+B\*u)-(1/2)\*(A\*X0+B\*u));

X\_bashfort\_solution(i,:)=X\_next(1);

Y\_bashfort\_solution(i,:)=t;

Y\_analytical\_solution(i,:)=t;

X\_analytical\_solution(i,:)=analytical\_solution(t);

X0=X;

X=X\_next;

t=t+h;

i=i+1;

end

difference\_solution=abs(X\_analytical\_solution-X\_bashfort\_solution);

% plot(Y\_bashfort\_solution,X\_bashfort\_solution)

% plot(Y\_analytical\_solution, X\_analytical\_solution)

plot(Y\_analytical\_solution, difference\_solution)

# Приложение 6.

clear; clc;

analytical\_solution = @(t) ((15\*exp(-t\*(16699/(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) + (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 133/90))\*(349045200000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(5/3) - 31430107800\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) - 1054909875600\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) - 2364\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2) + 53067\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2)\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 35910\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2)\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 34443590320))/((8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(135261900\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 65610000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 278856601)) - (exp(t\*(16699/(16200\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) + (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)/2 - 133/90))\*cos((3^(1/2)\*t\*(16699/(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) - (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)))/2)\*(11970\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(399\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2) - 3997740600\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 10820952000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 2624400000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 5340815420))/(6\*(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(135261900\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 65610000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 278856601)) - (3^(1/2)\*exp(t\*(16699/(16200\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) + (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)/2 - 133/90))\*sin((3^(1/2)\*t\*(16699/(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)) - (2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3)))/2)\*(11970\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 16699)\*(399\*1095697^(1/2)\*4860000^(1/2) - 3997740600\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(1/3) + 5410476000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) - 5813448620))/(6\*(8100\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) - 16699)\*(135261900\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(2/3) + 65610000\*(2185507/729000 - (1095697^(1/2)\*4860000^(1/2))/4860000)^(4/3) + 278856601)) + 10);

% analytical\_solution = @(t) (10.0 - 9.99\*exp(-0.03991\*t)\*cos(0.1325\*t) - 3.348\*exp(-0.03991\*t)\*sin(0.1325\*t) - 0.01028\*exp(-4.354\*t));

a0=1;

a1=4.4;

a2=53.2;

a3=12;

u=10;

X0 = [0; 0; 0];

z1 = (-a0/a3);

z2 = (-a1/a3);

z3 = (-a2/a3);

z4 = (1/a3);

A=[0 1 0; 0 0 1; z1 z2 z3];

B=[0;0;z4];

E = eye(3);

h=0.1;

t=0;

X = A\*X0+B\*u;

Y\_kute\_solution=[];

X\_kute\_solution=[];

Y\_analytical\_solution=[];

X\_analytical\_solution=[];

i=1;

while t<=160

l1=A\*X0+B\*u;

l2=A\*(X0+l1\*h/2)+B\*u;

l3=A\*(X0+l2\*h/2)+B\*u;

l4=A\*(X0+l3\*h)+B\*u;

X\_next = X0 + h\*(l1+2\*l2+2\*l3+l4)/6

X0=X\_next;

X\_kute\_solution(i,:)=X\_next(1);

Y\_kute\_solution(i,:)=t;

Y\_analytical\_solution(i,:)=t;

X\_analytical\_solution(i,:)=analytical\_solution(t);

X=X\_next;

t=t+h;

i=i+1;

end

difference\_solution=abs(X\_analytical\_solution-X\_kute\_solution);

% plot(Y\_bashfort\_solution,X\_bashfort\_solution)

% plot(Y\_analytical\_solution, X\_analytical\_solution)

plot(Y\_analytical\_solution, difference\_solution)